日本心理学会第７０回大会ワークショップ
対立概念を通じて見たダイナミカルシステム・アプローチ (DSA)

千野直仁
愛知学院大学心身科学部

2006年11月5日

目 次

第1章　決定論 vs. 非決定論

1.1　哲学における決定論と非決定論ー自由意志の有無

林ら監修 (1983, pp.417-418) によれば、**決定論** (determinism) とは、哲学的理論としては、宇宙のあらゆる現象が先行諸原因によって厳密に決定されるという主張を意味し、哲学史上は、（1）論理的決定論、（2）神学的決定論、（3）機械的決定論、（4）心理学的決定論、がある。これらの中には、自由意志を否定する **硬い決定論**と、これを認めて両立させようとする**やわらかい決定論** (soft determinism) （W. ジェームズ）がある。

一方、同哲学事典 (1983, p.1142) によれば、**非決定論** (indeterminism) には、（1）心的な変化もしくは発展はどんな場合でもあらかじめ存在している心理的、外的条件によって説明され尽くすこちはできないとする説、及び（2）極端な形の自由意志論、がある。

1.2　物理学における決定論と非決定論ー因果律の成否

1.2.1　古典力学と量子力学

決定論と非決定論は、別の表現をすれば、**因果律** (law of causality) が成り立つか否かということである。古典力学では、よく知られているように、与えられた時間における質点の位置及び速度が既知の時、その後の質点の運動は完全に予測できる、つまり決定論である。一方、量子力学では、両者の同時的な正確な確定は原理的に不可能であることが、不確定性原理からわかる。つまり、ミクロの世界での物体の運動は非決定論が支配している。

1.3　数学（統計学）における決定論と非決定論ー確率的か否か

1.3.1　決定論的と確率論

数学や統計学におけるモデルの分類法としては、決定論的か **確率論的** (probabilistic, or stochastic) の2分法がよく用いられる。なお、近藤 (1987, p.19) は、これらを**確定的** 及び確率的と呼んでいる。

1.4　ダイナミカルシステムにおける決定論と非決定論ーカオスの有無

1.4.1　古典力学の例

古典力学の例として最もよく知られている場は、**保存場** (the conservative field) でかつニュートンの第 2 法則が成り立つような場である。まず、保存場は数学的には

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -grad\,V(\boldsymbol{x}) = -\left(\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}, \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_3}\right)^t, \tag{1.1}$$

として定義される。ここで、$\boldsymbol{F}$ は質点 $\boldsymbol{x}$ に作用する **力** (force) を、V は **ポテンシャル（または位置）エネルギー** (the potential energy) 関数である。

一方、ニュートンの第 2 法則は、

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}, \tag{1.2}$$

として表される。

ニュートンの第 2 法則が成り立つような保存場、すなわち

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = -grad\,V(\boldsymbol{x}) = -\left(\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}, \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_3}\right)^t, \tag{1.3}$$

では、粒子の全エネルギー、すなわち $E = T + V$（ここで、T は **運動エネルギー** (the kinetic energy) である）は保存されることが証明できる。ニュートンの第 2 法則が成り立つような保存場は、それを特別なケースとして含む **ハミルトン系** (the Hamiltonian system) の例でもある。ハミルトン系は保存場と同様、決定論的方程式で表されるが、場合によりカオスが現れることがある（例えば、Lorenz, E. N., 1993, 杉山ら訳, 1998, pp.59-65)。

1.4.2　２次元一階非線形自励微分方程式系

２次元一階非線形自励微分方程式系とは、つぎのような微分方程式系であり、式の右辺は一般に非線形な関数から成り、時点 t を含まない点が大きな特徴である：

$$\begin{pmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

この方程式系の場合、決定論的方程式であり、かつカオスは存在しない ことがわかっている。２次元一階非線形自励微分方程式系でカオスが存在しない理由は、**ポアンカレ・ベンディクソンの定理** (The Poincaé-Bendixson)（例えば、白岩、1975）による。

1.4.3　２次元一階非線形非自励微分方程式系

２次元一階非線形非自励微分方程式系とは、つぎのような微分方程式系であり、式の右辺は一般に非線形な関数から成り、時点 t を含む点が大きな特徴である：

$$\begin{pmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, t) \\ g_2(x_1, x_2, t) \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

この方程式系では、決定論的方程式ではあるが、場合によりカオスが存在する（例えば、合原、2005, p.6; Ueda, 1992)。

1.4.4　１次元一階非線形差分方程式ーロジスティック写像

この方程式は、非線形差分方程式の例として、Peitgen and Richter (1986) では、**フェアフルストの力学** (Verhulst dynamics) として紹介されている。この系は、個体数の増殖モデルであり、ある時点でのある生物の個体数を $x(0)$ とし、n 年後の個体数を $x(n)$ 、その生物の増殖率を $R = (x(n+1) - x(n))/x(n)$ とする。ここで、もしこの増殖率が一定、すなわち r を定数として、$R = r$ であるとすれば、増殖のモデルは、$x(n+1) = (1+r)x(n)$ と書け、個体数の変化は単純なものとなる。これに対して、フェアフルストは R は一定ではなく、$R = r(1-x(n))$ と仮定した。こうすると、個体数の変化の法則は、

$$x(n+1) = (1+r)x(n) - rx^2(n) \tag{1.6}$$

と書ける。

この方程式は、離散的ロジスティック方程式 (the discrete logistic equation) (Elaydi, 1999, p.15)、ロジスティック微分方程式のアナログ (the analogue of the logistic differential equation (May, 1975, p.513)、あるいは **ロジスティック写像** (the logistic map) (合原編、1992; Hao, 1989, p.6) などとも呼ばれてきた。ロジスティック写像は、文献上では、つぎのいずれかの形で表現されることが多い：

$$y(n+1) = 4\lambda y(n)(1-y(n)), \quad y \in (0,1), \quad \lambda \in (0,1), \tag{1.7}$$

あるいは、

$$x(n+1) = 1 - \mu x^2(n), \quad x \in (-1,1), \quad \mu \in (0,2). \tag{1.8}$$

< 図 1.1
ロジスティック写像も明らかに決定論的モデルであるが、(1.7) 式の λ あるいは (1.8) 式の < 図 1.2
μ の値によっては、カオスが現れる。例えば、(1.8) 式の場合、μ を 0.5、0.9、1.3 と変化させ < 図 1.3
ると、図 1.1 から図 1.3 のように、**固定点** (a fixed point)、**2-周期点** (a two-cycle)、**4-周期** < 図 1.4
点 (a four-cycle)、となり、いわゆる **倍周期分岐** (the period-doubling bifurcation) がつぎつ < 図 1.5
ぎと起こり、その極限は **カオスの境界** (the boundary of chaos) として知られている。その点
は、$\mu = 1.4011551890\cdots$ である。図 1.4 は、カオスの境界の近傍の値での軌道を描いたもの
である。また、μ が定義域の右端すなわち $\mu = 2.0$ では図 1.5 のようなカオスが現れている。 < 図 1.6

図 1.6 はよく知られたロジスティック写像の場合の **分岐図** (a bifurcation diagram) を Maple < 図 1.7
により描いたものである。また、図 1.7 は、図 1.6 の分岐図の中で大きな**周期窓** (periodic window) の開いている 3-周期点の μ の値 ($\mu = 1.7548776\cdots$) の近くに絞って軌道を描いたものである。多くの非線形系に特有のいわゆる **自己相似構造** (the self-similar structure) が現れていることがわかる。

1.4.5　決定論的カオスの特徴

ここで、力学系における（決定論的）カオスの特徴を整理しておこう。合原編 (2005, p.9) によれば、それはつぎのようにまとめられる：

1. **軌道不安定性** (orbital instability)
   初期変位が指数関数的に伸ばされて、最終的にはアトラクタのサイズにまで拡大される。初期変位の伸び率は、リアプノフ指数で定量化される。

2. **長期予測不能性** (long-term unpredictability)
   (1) の軌道不安定性という性質があるので、無限大の精度で初期状態を観測しない限り、観測誤差が指数関数的に拡大される。その結果、長期的には予測不可能となる。しかし、決定論的ダイナミックスに従ってはいるので、良いモデルを作れば短期的には予測可能となる。このような特徴は、決定論的非線形予測と呼ばれる手法を用いて解析される。
3. **有界性** (boundedness)
   (1) の軌道不安定性のみでは、初期変位における誤差が拡大されるのみで発散する。アトラクタとして漸近安定な状態を保つためには、非線形折り返しによる再帰運動により、有界な領域に存在する必要がある。
4. アトラクタのフラクタル性、**自己相似性** (self-similarity)
   カオス力学系のアトラクタの幾何学的な構造は、多くの場合自己相似構造（フラクタル構造）を持つ。自己相似性は、非整数のフラクタル次元で定量化される。そこで、アトラクタの構造をフラクタル次元解析を通じて定量化する。
5. **非周期性** (nonperiodicity)
   時系列信号として観測したときに、非周期的な挙動を示す。例えば、図 1.2(a) はその典型例である。従って、パワースペクトラムの推定は、カオス時系列解析にとっても、依然重要な解析手法の１つである（図 1.3)。

ここで、**アトラクタ** (attractor) とは、簡単に表現すれば、微分力学系であれ差分力学系であれ、力学系の解曲線（軌道）上の点のうち、長期的な振る舞いの結果、吸い込まれていった先の点または点のの集合をいう。アトラクタは、現在ではつぎの４種類に分けられる。１つは、１点から成るアトラクタで、**ポイントアトラクタ** (point attractor) とも呼ばれることもある。これは、のちに見る微分力学系や差分力学系のの平衡点 (微分力学系では特異点、固定点、差分力学系では固定点とよく呼ばれる）のうちの幾つかがそれにあたる。２つ目は、やはりのちに見るリミットサイクルであり、閉軌道から成るアトラクタである。３つ目は、**トーラス** (torus) である。４つ目は、**ストレンジアトラクタ** (strange attractor) または**カオスアトラクタ** (chaos attractor) 、及びハミルトン系のアトラクタ（カオスの海、と呼ばれる）(Lorenz, 1993) である。

1.5　集団のダイナミカルシステムにおける決定論と非決定論

- DYNASCAL における決定論・非決定論
  Chino & Nakagawa (1983, 1990) による **DYNASCAL** (DYNamical system SCALing の略) は、(1.5) 式のような **２次元一階非自励微分方程式系**を仮定しているので原理的には場合によりカオスが存在する可能性があるが、各時点での系は２次元一階自励系を仮定しており、自励系の時間変化に伴う系の軌道特性の変化を分岐理論を用いて分析するのみであり、方法的には決定論的なアプローチに近い。

  実際、千野 (2006, 印刷中) は、DYNASCAL で得られるであろう２次元一階非自励系の例として、以下のモデルを考察している：

$$\begin{pmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[(\frac{x_1}{2a})^2 + (\frac{x_2-bt}{b})^2 - 1.0\right]/c \\ \left[cos(\frac{\pi x_1}{2a}) - \frac{x_2}{2b}\right]/c \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

この系で、a、b、及び c は適当な定数である。図 1.8 から図 1.14 は、この系で t の値を ＜図 1.8

＜図 1.9
＜図 1.10
＜図 1.11
＜図 1.12
＜図 1.13
＜図 1.14

マイナス３ から３まで１づつ動かして得られる系を、各時点での２次元一階自励微分方程式系と見なしたときのベクトル場とその基本的な軌道を描いたものである。これを見ると、最初見ず知らずの４０名の成員により始まった心理学的空間（図 1.8 のような際だった特徴のないベクトル場）に、成員間の相互作用により　**特異点** (singular points, or equilibrium points etc.) が生まれ、幾種類かの **局所的及び大局的分岐** (local and global bifurcations) により成員間のグループダイナミックスが形成・変容し、最後にはまたもとの何ら特徴のない図 1.14 のベクトル場に戻る過程が、一目で分かる。ここで、ベクトル場の特異点とは、一次導関数がゼロ、すなわち、軌道上でそれに対する接線の傾きがゼロとなる点をいう。また、この種の系により、特異点の分岐理論を用いれば（カオスを仮定せずとも)、小集団の生成・分解の過程の多くが記述できることがわかる。

ただし、DYNASCAL は、あくまでも帰納的かつ記述的方法であり、このような系の軌道特徴の変化にかかわる心理学的変数の特定ということになると、異なるアプローチや分析が必要となろう。

- Gregerson & Sailer のメタモデルにおける決定論・非決定論

Gregerson & Sailer (1993) の **２次元一階実非線形差分方程式系**では、カオスの出現する可能性があるので、決定論的モデルであるが場合によっては非決定論的現象を記述することができる。

この系は、実２次元差分方程式系としてつぎのように表される：

$$\begin{aligned} x(n+1) &= r_x^{(1)}x^2(n)+r_y^{(1)}y^2(n)+r_{xy}^{(1)}x(n)y(n)-c_x, \\ y(n+1) &= r_x^{(2)}x^2(n)+r_y^{(2)}y^2(n)+r_{xy}^{(2)}x(n)y(n)-c_y, \end{aligned} \tag{1.10}$$

ここで、c_x 及び c_y は、定数である。彼らによれば、このメタモデルは、もともと、個人、集団、組織に関する相互作用を行う２つの単位の状態の変化に関する一般的なモデルである。

- 千野の複素差分方程式モデルにおける決定論・非決定論

Chino (2002, 2003a,b, 2006a, b) の対人相互作用に関する複素力学系モデルは、一般に**多次元一階複素差分方程式系** を仮定するので、やはり場合によりカオスが現れる可能性があり、決定論的モデルにもかかわらず、非決定論的現象を説明する。

例えば、Chino (2002, 2003a) の複素差分方程式モデルは、$\boldsymbol{z}$ を p 個の複素数変数を要素とする**（複素）ヒルベルト空間** (the complex Hilbert space) 上の複素ベクトルとして、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}_{j,n+1} &= \boldsymbol{z}_{j,n} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{r}\sum_{k\neq j}^{N} \boldsymbol{D}_{jk,n}^{(m)} \boldsymbol{f}^{(m)}(\boldsymbol{z}_{k,n}-\boldsymbol{z}_{j,n}), \\ &\qquad j=1,2,\cdots,N, \end{aligned} \tag{1.11}$$

と表される。ここで、

$$\boldsymbol{f}^{(m)}(\boldsymbol{z}_{k,n}-\boldsymbol{z}_{j,n}) = \begin{pmatrix} \left(z_{k,n}^{(1)}-z_{j,n}^{(1)}\right)^m \\ \left(z_{k,n}^{(2)}-z_{j,n}^{(2)}\right)^m \\ \vdots \\ \left(z_{k,n}^{(p)}-z_{j,n}^{(p)}\right)^m \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

さらに、 $\boldsymbol{D}_{jk,n}^{(m)} = diag\left\{w_{jk,n}^{(1,m)}, \cdots, w_{jk,n}^{(p,m)}\right\}$,
また、

$$\begin{aligned} w_{jk,n}^{(l,m)} &= a_n^{(l,m)} r_{j,n}^{(l,m)} r_{k,n}^{(l,m)} \sin(\theta_{k,n}^{(l,m)} - \theta_{j,n}^{(l,m)}), \\ & l = 1, 2, \cdots, p, \quad m = 1, 2, \cdots, r. \end{aligned} \tag{1.13}$$

ここで、互いに相互作用する成員の行動する心理学的空間として複素ヒルベルト空間を仮定する根拠は、計量心理学の分野で開発された非対称多次元尺度構成法の基礎的定理である **千野・白岩の定理** (the Chino-Shiraiwa's theorem) (Chino & Shiraiwa, 1993) にあるが、ここでは省略する。

ここで、(1.11) 式のモデルの特別なケースを見てみよう (Chino, 2006a)。例えば、この式で $p = 1$、$m = 2$ と仮定すると、(1.11) 式はつぎのように書ける：

$$z_{j,n+1} = a z_{jn}^2 + b z_{jn} + c, \tag{1.14}$$

ここで、

$$a = \sum_{k \neq j}^{N} w_{jk,n}^{(2)}, \quad b = 1 - \sum_{k \neq j}^{N} w_{jk,n}^{(1)} - 2 \sum_{k \neq j}^{N} w_{jk,n}^{(2)} z_{kn}, \tag{1.15}$$

また、

$$c = \sum_{k \neq j}^{N} \left\{ w_{jk,n}^{(1)} z_{kn} + w_{jk,n}^{(2)} z_{kn}^2 \right\}. \tag{1.16}$$

明らかに、(1.14) 式は、著名な **マンデルブロー系** (the Mandelbrot's system) と同等である。

(1.14) 式の系で、もし $a = 1$、$b = 0$、かつ $c = 0$ ならば、**ジュリア集合** (the Julia set) は単位円となり、円盤上の $z = 0$ と $z = 0$ が固定点である。また、前者は**超吸引的** (superattracting) であり、後者は **反発的** (repelling) であことが容易に証明できる。実際、例えば図 1.15 のような単位円内部の一点から出発する軌道は、図にあるように数回の反復で原点 $z = 0$ に達する。

一方、図 1.16 のように、この系は例えば、円周上の点 $z_0 = cos(\pi/21) + i\, sin(\pi/21)$ ＜図 1.15
から出発すると、理論的には円周上を無限に回転しカオスとなるはずであるが、計算機 ＜図 1.16
の丸めの誤差により、現実にはある程度円周上にとどまったあと、例えば円内に落ちると数回の反復で原点に吸引されていく。

(1.14) 式の系は、もし $c = -0.12 + 0.74i$ であれば、図 1.17 のようになる。この図 ＜図 1.17
は例えば、Peitgen and Richter (1986) の Figure 4 にも示されている。この図の白い部 ＜図 1.18
分は一般に**充填ジュリア集合** (the filled Julia set) と、その周囲の境界はジュリア集合と、そしてジュリア集合の補集合は**ファトウ集合** (the Fatou set) と呼ばれる。これらの概念については、あとの 2.2 節で正確な定義を行う。

この系には、２つの **反発的点** (the repelling point) $-1.2737 + 0.4782i$ と $-1.2737 - 0.4782i$ 及び１つの３-周期点があることがわかっている。図 1.19 は、１つ目の反発的点の近傍から出発した時の、系の軌道を示している。この軌道は、ある反復の後、系の充填ジュリア集合の外に飛び出して無限遠点に向かう。<u>小集団の力学系を考えた場合</u>、ファトウ集合が集団の中を、ジュリア集合が集団の境界にあたるとみれるので、このような成員の振る舞いは、<u>ある成員が次第に孤立する動き</u> と解釈できよう。また、この系のジュリア集合も <u>自己相似構造</u> を持っている。

1.6　心理学全般におけるカオス

1.6.1　カオスの役割

前節では、ロジスティック写像や小集団の形成・変容過程の差分力学系を仮定すると、一次元の場合でさえ、決定論的方程式でありながらカオス等が現れることを見てきた。一方、微分方程式系では 2 次元非線形非自励方程式系の一部及び 3 次元以上の非線形自励系等で、決定論的方程式でありながらカオスが現れることがわかっている。

小集団以外の分野では、例えばニューラルネットワークの分野では、例えば Tsuda (1991) は、神経回路の非線形振動子 (nonlinear oscillator) に関する考察から、われわれの「知覚」は力学系の特異点（固定点）であり、「概念」はリミットサイクル、トーラス、カオスなどの振動活動であろう、と述べている。

それでは、心理学全般においてカオスはどのような現象を説明したり予測したりすることが可能であろうか。また、個々の心理学的現象にカオスが存在するとしたら、それらは当該現象でどんな心理学的役割を担うのであろうか。この辺の十分な吟味をしていかないと、心理学におけるカオスの議論は実証科学にはなりえず、単なるお話に終わってしまうのではなかろうか。それを避けるためには、

1. 研究対象とする現象を力学系の枠組みで捉える必要性の有無の吟味
2. 力学系の種類（微分系、差分系、記号系）、及び状態空間を構成する変数の特定
3. 当該現象に対する演繹的力学系モデルによる系の軌道特性のシミュレーション的検討
4. データの収集
5. データ分析を通じてのモデルの評価
6. 適合モデルによる現象の予測とその評価

のようなステップが必要であろう。とりわけ、うえの第 1 段階で当該現象の専門家と計量・数理心理学者、数学者、医学者、生物学者などとの十分な時間をかけた討議をすることが望ましかろう。データの分析は、多くの場合、収集してからでは遅いのであって、データ収集前の、当該現象に対する理論的・実証的枠組みの検討が必須と思われる。

1.6.2　状態空間の測定

心理学の分野における現象に力学系のモデルを適用する場合、必ずしも状態空間の次元ばかりでなく、状態空間そのものが直接観測できるとは限らないであろう。例えば、既述の小集団の相互作用により生じると考えられる **感情構造** (a sentiment structure) の状態空間を、Chino & Nakagawa (1983, 1990) では、各時点の成員相互のソシオマトリックスデータに、計量心理学の分野で開発された **多次元尺度構成法** (multidimensional scaling methods) の 1 つを適用することにより推定している。この方法では、尺度構成法により状態空間の次元数も同時に推定している。

ただし、上記のような尺度構成法にもそれぞれの方法が前提としている**データの尺度レベル** (scale level of data) の問題がある。すなわち、心理学で測定されるデータは必ずしも微分力学系や差分力学系を直接適用できるような尺度レベルを必ずしも持っていないので、注意が必要である。よく知られているように、心理学的データは通常、名義尺度、順序尺度、間隔尺度、比率尺度のいずれかのレベルで測定される。そして、とりわけ心理学的測定でよく用いられる評定尺度は、間隔尺度レベルであると言われることが多い。しかし、それは厳密には**順序**

情報しか持っていないと考えるべきであろう。そのような場合、データに微分力学系や差分力学系のモデルを当てはめる前に、データから評定尺度カテゴリーの境界をすべて推定した方がよかろう。また、名義尺度レベルしか得られないのであれば、微分力学系や差分力学系モデルではなく、記号力学系を当てはめるべきであろう。

幸い、非対称多次元尺度構成法（例えば、千野、1997）も最近では、Winsberg & Carroll (1989) や 千野ら (Chino, 1992, Saburi & Chino, 2004, 2005, 2006) により、最尤法を用いた推測統計的手法として再開発されつつあり、千野らではソシオマトリックスデータ収集に際して、データは順序尺度レベルでも評定尺度カテゴリーの境界値をすべて推定できる。

1.6.3　カオスの測定

物理学や化学等の扱う自然科学的現象に対するカオスの測定に関しては、最近出版された合原編 (2003) が詳しい。しかし、これを見ると、自然科学的現象でさえ、カオスの測定には 千単位の 大量の良質な時系列データが必要 であるという。一方、心理学の分野では、たとえ状態空間定義がきちんとなされ、なおかつその観測値が誤差を除き厳密に測定できたとしても、現状では研究対象に対する大量な時系列的データの収集自身が困難な場合が多いであろう。

もっとも、今後の脳科学の進展次第では理論面ばかりではなく、早晩微量の脳内物質の分泌状態とその変化を被験者の苦痛を伴うことなしにリモートで経時的に収集しモニターできる装置などが工夫されるかも知れない。そうなれば、ニューラルネットワークに限らず、対人的相互作用により形成され変容していくような多くの社会的ネットワークに対する力学系による研究も大きく進展するのではないか。ただし、このような研究には、倫理的な問題が内在しており、たとへ技術的に可能になったとしても、データの収集に際しては慎重な対応が必要となろう。

いずれにせよ、当面心理学における力学系の理論構築の第 1 ステップは、それぞれの分野の専門家で当該現象について地道な実証研究を行っている研究者と計量・数理心理学者、場合によっては数学の力学系の専門家が共同研究し、実証的知見に基づいた少数の仮定から導かれるメタモデルを構築し、その妥当性をシミレーションも含めた色々な角度から検討することではないか。

第2章　線形 vs. 非線形

2.1　微分方程式の場合

- **線形一階微分方程式**

$$\frac{dx}{dt} = ax, \tag{2.1}$$

について述べる。ここで、x は**状態変数** (the state variable) で実数、t は（実）時間であり、a は実定数である。また、**状態空間** (the state space) は、一次元空間である。

この方程式の**１つの解** (a solution) は、k を任意の定数として、

$$x = f(t) = e^{ta}\, k, \tag{2.2}$$

と書ける。実は、(1.1) 式の解は（k を固定すれば）、一意的に定まることを証明できる。このことから、(1.1) 式を**初期値問題** (an initial value problem) の形、すなわち

$$x' = ax, \quad x(0) = k, \tag{2.3}$$

と書くと、(2.1) 式の場合、その初期値問題は **一意解** (a unique solution) を持つ、と言える。図 2.1 は、$a = 0.1$ の場合、(2.2) 式の k の値を $-2,\ -1,\ 1,\ 2$ と変え、解曲線を Maple により描かせた結果である。この図で、横軸は時間 t を、縦軸は x を表す。図から明らかなように、線形一階（実）微分方程式の解曲線はきわめて単純な指数関数である。また、初期値を変えると解曲線は無数に引ける（存在する）ことに注意したい。

< 図 2.1

より正確に解曲線の分類を行うとつぎのようになる：

1. $a > 0$ の時、$k > 0$ ならば、$x \to \infty$。$k < 0$ ならば、$x \to -\infty$。
2. $a = 0$ の時、$x = k(constant)$。
3. $a < 0$ の時、$x \to 0$。

(2.1) 式の特徴は、つぎのとおりである：

1. この式では、状態変数 x の値の時間変化が時点 t には依存せず x にのみ依存する、と仮定される。
2. 状態変数の時間変化は、状態変数の値 x に比例する（x の線形関数である）。
3. この方程式の解曲線（軌道）(図 2.1) の任意の横軸 t での接線の傾きは、(2.1) 式の形から、縦軸 x の値に比例する（a が負なら反比例する）。

- **線形一階微分方程式系**

状態変数が複数存在する場合、微分方程式は複数となり微分方程式系と呼ばれる。この場合の線形性は、(2.1) 式のスカラー x と a を共に行列で表すことにより見やすく把

握できる：

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \cdots, \frac{dx_n}{dt}\right)^t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{k} \in R^n. \tag{2.4}$$

(2.4) 式で表される系の解曲線は、つぎのようになる：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t) = e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{k} = e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}_0. \tag{2.5}$$

線形一階微分方程式系の場合、解曲線の特徴は上述の一次元の場合と異なりかなり**複雑なものとなる**。実際、この場合軌道特徴（正確には、局所的な）は、この系により表される**ベクトル場** (the vector field) の特異点の特徴を調べることにより、ある範囲で調べることが可能である。

すなわち、線形一階微分方程式系では、ベクトル場の特異点の近傍での軌道は、(2.4) 式の行列 $\boldsymbol{A}$ の **固有値** (eigenvalues) と **固有ベクトル** (eigen vector) により決まることがわかっている。より正確には、$\boldsymbol{A}$ の **実標準形** (real canonical form) を求める必要がある。一般に、(2.4) 式の方程式は、状態変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ の正則変換 (non-singular transformation) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ によっても形は不変であり、

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(0), \tag{2.6}$$

と書ける。上で２つ目の式は、一般に行列 $\boldsymbol{A}$ の相似変換 (similarity transformation) と呼ばれ、幾つかの変換が知られているが、実標準形はそれらのうちの１つである。

とりわけ、状態空間の次数が２の場合、実標準形による変換後の行列 $\boldsymbol{B}$ は、基本的には３パターンであることがわかっており、固有値と固有ベクトルの言葉では、（１）固有値が相異なるかあるいは重複実根で、相異なる固有ベクトルが２本の場合、（２）固有ベクトルが１本で重複実根の場合、（３）複素根の場合、の３通りである。

まず、（１）の場合で固有値が相異なる場合、固定点の近傍での解曲線の特徴は、λ_1、λ_2 の値に応じて、**鞍点** (saddle) (図 2.2、2.3)、**（内向）結節点** (inward node)（図 2.4、2.5)、または**（外向き）結節点** (outward node)（図 2.6、2.7）となる。一方、（１）で固有値が重複する場合、図 2.8、2.9 のような固定点の近傍での解曲線の特徴を示すことがわかる。これらは、**焦点** (focus) と呼ばれる。 < 図 2.2-2.9

つぎに、（２）の場合には、軌道特徴は、図 2.10、図 2.11、図 2.12 もしくは図 2.13 ようになる。これらは、**仮性**（或いは **変格**）**結節点** (improper node) と呼ばれる。 < 図 2.10-13

最後の（３）の場合で複素根の実部がゼロでない時、図 2.14 または図 2.15 のような**渦状沈点** (spiral sink) か、図 2.16 または図 2.17 のような**源点** (source) となる。また、複素根の実部がゼロの場合、図 2.18 または図 2.19 のような**渦心点** (center) となる。 < 図 2.14-19

- **非線形一階微分方程式系**

  非線形一階微分方程式系の軌道特性は、一般にその系を特異点で線形化することにより線形一階微分方程式系に帰着することにより、特異点の近傍での軌道特徴を調べることができる。

  1. 平衡点での系の線形化

     まず非線形一次微分方程式系をつぎのように定義することにしよう：

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in R^n, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{k}. \tag{2.7}$$

     まず、(2.7) 式の平衡点（したがって、固定点、特異点、浮動点でもある）$\boldsymbol{x}^*$

は、$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$ なる点である。したがって、特異点の近くでの解曲線の振る舞いは、$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の特異点 $\boldsymbol{x}^*$ における **ヤコビアン** あるいは、**ヤコビ行列** (the Jacobian matrix) $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}^*}$ により線形化された系

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{x}, \tag{2.8}$$

を調べてやればよい。ここで、

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}^*} = \left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*} . \tag{2.9}$$

一般に、(2.7) 式で表される非線形系の平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ は、線形化された系 (2.8) 式におけるヤコビアンのすべての固有値が負の実部を持つならば、沈点と呼ばれる。非線形沈点は、局所的には線形沈点のように振舞う。ただし、上記非線形系の特異点の近傍での系の振る舞いは、ヤコビアンがどのような場合でも決定できるわけではない。後続の節「構造安定性」で述べるように、これが可能なのは、特異点でのヤコビアンの固有値が “非ゼロ実部” (non-zero real part) を持つ場合に限ることが知られている。さもなければ、われわれは系の線形化によっては系の振る舞いを決定できない。いわゆる構造安定性の議論が存在するからである。実際、例えば渦心点だけは、固有値の実部がゼロなので、正確には原理的に観測できない。実際、図 3.18 も図 3.19 も、コンピュータにこれを描かせても、丸めの誤差を伴うので、正確には円にはならない。

2. <u>線形系にはない非線形系の軌道特徴</u>

これまで、非線形一次微分方程式系における局所的な系の振る舞いとして、系を特異点で線形化し、非退化特異点の近傍での系の振る舞いを見てきたが、一般の非線形系とりわけ２次元非線形系では、特異点以外によく知られたものに、**リミットサイクル** (limit cycles) がある。リミットサイクルは、渦状沈点または渦状源点の周りに **閉軌道** (closed orbit) を伴う。リミットサイクルには２種類あり、１つは **アルファリミットサイクル** ($\alpha-$limit cycle) 、もう１つは **オメガリミットサイクル** ($\omega-$limit cycle) と呼ばれる。

アルファリミットサイクルは、閉軌道外側の近傍ではそこから徐々に離れていく軌道、および閉軌道の内側の近傍でもそこから徐々に離れて内側に存在する渦状沈点にひきつけられていく軌道を伴う。両方の軌道とも、時間をどんどんさかのぼると無限に閉軌道に近づく。一方、オメガリミットサイクルは、閉軌道の外側では遠くから閉軌道に外側から無限に近づく軌道と、閉軌道の内側の渦状源点の近傍から出発して閉軌道に内側から無限に近づく軌道から成る。図 2.20 のリミットサイクルは、Hirsch & Smale (1974, pp.227-228) で紹介されている電気回路の物理的特性を記述する非線形自励微分方程式系で、分岐パラメータの値 $\mu = 0.5$ のケースを Maple で描いたものである： ＜図 2.20

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x - x^3 + y \\ -x \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

図では、原点が渦状源点であり、原点の近傍から出る解軌道は卵型の閉軌道に無

限に近づいていく。一方、卵型の閉軌道の外から出発する軌道は、図のように閉軌道の外側から閉軌道に対して無限に近づいていく。閉軌道上での動きはこの場合、右廻り（時計廻り）である。この系の軌道特性は、この分岐パラメー タ μ の値が連続的に変化するとき、劇的に変わる。つぎの図 2.21 は、図 2.20 のオメガリミットサイクルが現れる前の系の軌道特性であり、渦状沈点である。この沈点の中心から突然小さなオメガリミットサイクルが出現し大きくなっていくことになる。 ＜図 2.21

- **分岐パラメータを伴う非線形一階微分方程式系**

前節では、単純な非線形一階微分方程式系を扱った。その場合、状態変数（ベクトル）の時間変化は、状態変数ベクトルの値のみに依存し、時間 t にも他のパラメータにも依存しない系であった。ここでは、状態変数（ベクトル）の時間変化が、状態変数の値のみでなく、系の軌道特性を変える何らかのパラメータ、いわゆる**分岐パラメータ** (bifurcation parameters) にも依存するような系を扱う。

1. **自励系の場合**

前節の最後に見た (2.10) 式の非線形一階微分方程式系は、パラメータ μ を特定の値に固定した場合、ある値の範囲でリミットサイクルが出現した。実は、(2.10) 式の方程式系で μ を変数と考えると、ここで扱う分岐パラメータのある非線形一階微分方程式系の例そのものである。この系は、特異点の数ある分岐の中で**ホップ分岐** (the Hopf bifurcation) と呼ばれる分岐の基本方程式の一つである。一般には、非線形一次微分方程式系では、**分岐パラメータ** (bifurcation parameters) を $\boldsymbol{c}$ とベクトル表現すれば、系はつぎのように書かれる：

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}). \tag{2.11}$$

上述のホップ分岐は、この一般的な系の特殊例であり、分岐パラメータはその場合１つで、$c_1 = \mu$ である。

一般に、ベクトル場の分岐には２種類ある。１つは、特異点の近傍での系の振る舞いの変化に関するもので、**局所的分岐** (local bifurcation) と呼ばれる。もう１つは、特異点の近傍の系の振る舞いの変化ではなく、ベクトル場全体での系の振る舞いの変化に関するもので、大局的分岐と呼ばれる（例えば、Guckenheimer & Holmes, 1983)。

非線形２次元自励系で分岐パラメータが１つしかない場合の局所的分岐としては、従来 **サドル・ノード分岐** (saddle-node bifurcation)、**ピッチフォーク分岐** (pitchfork bifurcation)、**トランスクリティカル分岐** (transcritical bifurcation)、**ホップ分岐** (Hopf bifurcation)、などがよく知られている。

例えば、サドル・ノード分岐は、分岐パラメータの連続的な変化により、あるパラメータの値になると（特異点がない状態から）突然退化特異点がまず生まれ、その後鞍点と結節点が生まれて成長するプロセスである。退化特異点は、もちろん構造不安定であり、原理的に（少しでも誤差を伴う観測では）観測不能である。

ホップ分岐は、先に述べたとおりである。 一方、大局的分岐には、**サドルループ** (saddle loop) や **サドル結合** (saddle connection) などが知られている。サドルループは、渦状沈点と鞍点の対から成るベクトル場が、分岐パラメータの変化により、突然渦状沈点が渦心点に変わり、さらに渦心点が源点に変化する場合をいう。サドルループでは、ベクトル場の変化はある特異点（この例では、渦状沈点）の近

傍のみにとどまらず、対となっている鞍点とのかかわりでもベクトル場の特徴が変化する点が局所的分岐と異なる点である。

サドル結合は、近接した２つの鞍点間のベクトル場の特徴が、分岐パラメータの変化により、突然一方の鞍点から出る軌道が対の鞍点に入る軌道に変化し、その後２つの鞍点の位置を変えることにより、サドル結合が解ける場合をいう。

局所的分岐にせよ、大局的分岐にせよ、分岐の瞬間には退化特異点が生ずるが、構造安定性の議論から、そのような分岐の瞬間は構造不安定で、原理的には誤差を伴う観測によっては観測不可能である。

これまで紹介してきたいろいろなベクトル場の分岐についても、場合により、心理学的解釈が可能である。例えば、千野ら（Chino, 1987; 千野, 1991; Chino & Nakagawa, 1990）は、ホップ分岐が社会心理学的に解釈できることを示している。実際、例えば図 2.21 から図 2.20 への渦状沈点からオメガリミットサイクルへの分岐は、渦状沈点を下位集団の形成過程の１つと解釈すれば、**一旦形成されつつあった下位集団の芽が**、何らかの分岐パラメータの連続的変化により、その中心からしぼみだし、（オメガリミットサイクルの内側の渦状源点により）**崩壊しつつある過程**、と解釈できる。

これに対して、アルファリミットサイクルによるホップ分岐は、渦状源点により表されるベクトル場、すなわちそれまで他の成員が近づくことが出来なかった心理学的場の中心に、何らかの分岐パラメータの値の連続的変化により、突然アルファリミットサイクルが生じ大きくなっていくプロセスである。アルファリミットサイクルの中心には渦状沈点があり、閉軌道の中は、小集団の形成過程と解釈できるので、この場合のホップ分岐はそれまで他の成員が近づけなかった心理学的場の中心に突然成員を惹きつける場が生じ、閉軌道すなわち **閉鎖的な下位集団が成長していく場** と解釈することができる。

2. **非自励系の場合**

非自励系の場合、分岐パラメータを伴う系は、時間に関して周期的な系のポアンカレマップが定義される場合にポアンカレマップの分岐理論として存在する以外には分岐理論はない（白岩、2006, personal communication）。

2.2　差分方程式の場合

- **線形一階実差分方程式**

線形一階実差分方程式も、一般的には **線形非斉次一階差分方程式** (a linear nonhomogeneous first-order difference equation) と呼ばれ、つぎのように書かれる：

$$x(n+1) = a(n)\,x(n) + g(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad 0 \le n_0 \le n, \tag{2.12}$$

特に、$a(n) = a$ かつ $g(n) = b$ の場合は、

$$x(n+1) = a\,x(n) + b, \quad x(n_0) = x_0, \quad 0 \le n_0 \le n, \tag{2.13}$$

となり、その解は、

$$x(n) = \begin{cases} a^n x_0 + b\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}\right), & a \ne 1 \text{ の時} \\ x_0 + bn, & a = 1 \text{ の時} \end{cases} \tag{2.14}$$

この場合、(2.15) 式で $n \to \infty$ としたとき、解曲線はつぎのように分類できる：

1. $a > 1$ の時 $\Longrightarrow x \to \infty.$
2. $a = 1$ の時 $\Longrightarrow b > 0 \Rightarrow x \to \infty, \quad b = 0 \Rightarrow x = x_0, \quad b < 0 \Rightarrow x \to -\infty.$
3. $-1 < a < 1$ の時 $\Longrightarrow x \to \frac{b}{a-1}.$
4. $a = -1$ の時 $\Longrightarrow x$ は x_0 と $b - x_0$ 間を振動。
5. $a < -1$ の時 $\Longrightarrow x \to \pm\infty.$

ここで、(2.13) 式の $g(n)$ や (2.14) 式の b がゼロの系は、**線形斉次一階差分方程式** (a linear nonhomogeneous first-order difference equation) と呼ばれる。この場合は、解曲線の分類はさらに簡単になる。

1.4.4 節で紹介した、ロジスティック写像の場合と異なり 増殖率が一定としたモデル

$$x(n+1) = (1+r)x(n)$$

は、まさに (2.14) 式の b がゼロの、いわば 最も簡単な線形一階実差分方程式であり、系の振る舞いは 単調なものとなることがわかる。

- **線形一階実差分方程式系**

微分方程式系の場合と同様に、状態空間が多次元（ここでは、k 次元とする） の場合の線形一次差分方程式の組は、**線形一階差分方程式系** (a system of linear first-order difference equations) と呼ばれ、つぎのように書かれる：

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(n), \quad \boldsymbol{x}(n_0) = \boldsymbol{x}_0. \tag{2.15}$$

ここで、

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

は、**実正則行列** (real nonsingular matrix) とする。

(2.16) 式の解は、つぎのようになる：

$$\boldsymbol{x}(n, n_0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{A}^{n-n_0}\boldsymbol{x}_0. \tag{2.17}$$

系の軌道特性を調べるには、微分方程式系の場合の特異点に対応する系の**平衡点** (the equilibrium point) を計算し、その近傍での系の軌道特性を調べる必要がある。ここで、一般に、線形一階差分方程式の平衡点とは、$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^*$ が成り立つ点である。すなわち

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}$$

なる点が、(2.16) 式の平衡点である。したがって、行列式 $\mid \boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} \mid \neq 0$ ならば、平衡点は $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}$ である。

一方、行列式 $\mid \boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} \mid = 0$ ならば、任意の点を $\boldsymbol{c}$ とすれば、$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{c}$ はすべて平衡点となる。しかし、この場合は、$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}(n) - \boldsymbol{x}^*$ とおけば、(2.20) 式は、$\boldsymbol{y}(n+1) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}(n)$ とできるので、$\boldsymbol{x}^* \neq \boldsymbol{0}$ のような平衡点の安定性の検討にも、$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}$ と仮定してよい。

一般に、(2.18) 式における行列 $\boldsymbol{A}$ は、$\boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{y}(n)$ （ここで、$\boldsymbol{P}$ は正則とする） と変形すると、(2.20) 式はつぎのようになる：

$$\boldsymbol{y}(n+1) = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{y}(n), \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(0). \tag{2.18}$$

ここで、$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{k} = (k_1, k_2)^t$ とする。

結局、微分方程式の場合と同様、上の行列 $\boldsymbol{A}$ の実標準形 $\boldsymbol{B}$ を計算すれば、平衡点の近傍での軌道特性がわかる。とりわけ、２次元系の場合、実標準形のパターンは３つしかなく、微分方程式の場合の３つのパターンと同一である。ただし、ここでは Elaydi (1999) に従い、のちに述べる差分力学系の平衡点の安定性の定義を踏まえた平衡点の名称を示す。

まず、（１）の場合で固有値が相異なる場合、固定点の近傍での解曲線の特徴は、λ_1、λ_2 の値に応じて、**鞍点** (saddle) 、**漸近的安定結節点** (inward node)、または**不安定結節点** (outward node) となる。一方、（１）で固有値が重複する場合、**焦点** (focus) となり、漸近的安定結節点もしくは不安定結節点とも呼ばれる。

つぎに、（２）の場合には、軌道特徴は、微分力学系の場合の図 2.10、図 2.11、図 2.12 もしくは図 2.13 に似通ったものになる。差分系ではこれらは、漸近安定もしくは不安定結節点と呼ばれる。

最後の（３）の場合で複素根の実部がゼロでない時、図 2.14 または図 2.15 のような**渦状沈点** (spiral sink) か、図 2.16 または図 2.17 のような**源点** (source) となる。また、複素根の実部がゼロの場合、**渦心点** (center) となる。 ＜図 2.22-23

- **非線形一階実差分方程式**

実非線形差分方程式は、

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad x(0) = x_0, \tag{2.19}$$

と書ける。この方程式の点 $x = x^*$ は、もしそれが f の固定点、すなわち $f(x^*) = x^*$ であるならば、(2.20) 式の平衡点と呼ばれる。

差分方程式では、軌道特性として平衡点以外に、ある正整数 k に対して、k 回目ごとに同じ点に戻る点、すなわち **周期点** (a periodic point) を考えることができる。正確な定義はつぎのようである（Elaydi, 1999）：

定義 2.1　点 b は、f の定義域内にあるとする。この時、

(a) 点 b は、もしある正整数 k に対して、$f^k(b) = b$ ならば、f の（(2.20) 式における）周期点と呼ばれる。そこで、ある点が

$$x(n+1) = g(x(n)), \quad g = f^k, \tag{2.20}$$

の平衡点であるならば、すなわち f^k の固定点であるならば、**k-周期的** (k-periodic) である。点 b の周期的軌道、$O(b) = \{b, f(b), \ldots, f^{k-1}(b)\}$ は、しばしば **k-周期** (k-cycle) と呼ばれる。

(b) 点 b は、もしある正整数 m に対して、$f^m(b)$ が k-周期的ならば、**不測 k-周期的** (eventually k-periodic) と呼ばれる。

- **非線形一階実差分方程式系**

非線形一階実差分方程式系は、一般的にはつぎのように書ける：

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(n)), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{2.21}$$

ここで、$\boldsymbol{x}(n) = (x_1(n), x_2(n), \cdots, x_p(n))^t$ として、

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(n)) = (f_1(\boldsymbol{x}(n)), f_2(\boldsymbol{x}(n)), \cdots, f_p(\boldsymbol{x}(n)))^t$$

における各々の $f_j(\boldsymbol{x}(n))$ は、$x_1(n), x_2(n), \cdots, x_p(n)$ の多項式である。

- **分岐パラメータを伴う非線形一階実差分方程式**

  分岐パラメータを伴う非線形一階差分方程式は、一般的にはつぎのように書ける：

$$x(n+1) = f(x(n), \boldsymbol{\mu}), \quad x(0) = x_0. \tag{2.22}$$

1.4.4 節で既に紹介したロジスティック写像 (1.8) 式

$$x(n+1) = 1 - \mu x^2(n), \quad x \in (-1, 1), \quad \mu \in (0, 2)$$

は、非線形一階差分方程式の例である。1.4.4 節で見たように、分岐パラメータを伴う非線形一階実差分方程式では、線形一階実差分方程式にはない軌道特性、とりわけ μ の値によっては、一次元の写像にも拘わらずカオスが現れる点が興味深い。

- **分岐パラメータを伴う非線形一階実差分方程式系**

  (2.22) 式の非線形一階実差分方程式系の右辺の関数の中に分岐パラメータが入るのが、分岐パラメータを伴う非線形一階実差分方程式系

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(n), \boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{2.23}$$

である。1.5 節で紹介した Gregerson & Sailer (1993) のメタモデル

$$\begin{aligned} x(n+1) &= r_x^{(1)} x^2(n) + r_y^{(1)} y^2(n) + r_{xy}^{(1)} x(n) y(n) - c_x, \\ y(n+1) &= r_x^{(2)} x^2(n) + r_y^{(2)} y^2(n) + r_{xy}^{(2)} x(n) y(n) - c_y, \end{aligned}$$

は、その例である。しかし、彼らも指摘しているように、この式で $r_x^1 = 1$、$r_y^1 = -1$、$r_{xy}^2 = 2$ と置き、それ以外の r をゼロと置くと、この系は、よく知られた **マンデルブロー集合** を含む。ここで、マンデルブロー集合は、１次元複素差分方程式で表されるが、２次元実差分方程式と同一視できることに注意したい。

この２次元非線形差分方程式系も、パラメータの値によっては、カオスが現れる。彼らは、その幾つかについても考察している。

- **分岐パラメータを伴う非線形一階複素差分方程式**

  これまでは、状態空間が実数の場合の差分力学系について述べてきた。この節では、状態空間が複素数の場合について簡単にふれる。状態空間を複素領域に拡張すると、非常に単純な複素差分系でさえ、非常に複雑な解軌道特性が現れる。まず、複素力学系の基本的概念である、**ジュリア集合** (the Julia set)、**充填ジュリア集合** (the filled Julia set)、及び **ファトウ集合** (the Fatou set) について定義する（上田ら、1995)。

  まず、$f(z)$ は複素変数を定義域とする $p \geq 2$ なる複素多項式

$$f(z) = a_n z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0, \tag{2.24}$$

とする。

定義 2.2

1. 充填ジュリア集合 K とは、f のもとでの z の軌道が有界なすべての $z \in C$ の集合である。

2. ジュリア集合 J とは、充填ジュリア集合 K の境界 (the boundary) ∂K の集合である。
3. ファトウ集合 F とは、$f^n : S \to S$ を n 回合成写像として、f^n の集合の**正則領域** (the domain of normality) をさす。また、ファトウ集合の補集合は、ジュリア集合である。

(2.25) 式で、$p = 2$ の特別なケース

$$z(n+1) = z^2(n) + c_0, \tag{2.25}$$

について、実軸及び虚軸のある範囲の格子点の値を c_0 として、軌道が有界な 集合をプロットしたものは、**マンデルブロー集合** (the Mandelbrot set) として知られている。図 2.24 は、これを示す。また、既に 1.5 節で紹介した図 1.17 は、まさにマンデルブロー集合で $c_0 = -0.12 + 0.74i$ の場合の、ジュリア集合（白抜きの境界）とその内部（ファトウ集合）を示したものである。　< 図 2.24

これらからわかるように、分岐パラメータを伴う非線形一階複素差分方程式では、最も単純な ２次方程式でさえ、豊かなカオスが出現することがわかる。

2.3　集団のダイナミカルシステムにおける線形性と非線形性

最後に、第１章の決定論 vs. 非決定論のところで既に紹介した、集団の力学系における線形性と非線形性について見てみよう。

- DYNASCAL における線形性・非線形性

  まず、DYNASCAL における線形性・非線形性については、DYNASCAL 自身は一般の（２次元）非線形モデルであるが、DYNASCAL ではデータから各時点のベクトル場とその特異点から出入りする基本的軌道特性を推定する方法であり、局所的には系の線形化により、特異点の近傍の軌道の線形的特徴を記述する。また、特異点とその軌道特性が時間と共に変化する様子を特異点の分岐理論を利用して分析する。これまで見たように、微分力学系では２次元系でさえ、特異点の近傍での軌道特性は多様なものがあり、局所的な軌道特性と集団の形成や分解過程を捉えることができる。

  一方、DYNASCAL では系の線形的特徴のみでなく、モデルの非線形性の仮定により、線形系では現れることのない２次元系の軌道特徴、すなわちリミットサイクルを分析することができる。こちらは、ホップ分岐の概念を利用することにより、可能となる。さらには、この分岐を小集団の形成・変容過程の中の１つの特徴的なパターンとみることもでき、興味深い。さらに、２次元非線形系でさえ、系の軌道特性の変容過程は、ホップ分岐などの局所的分岐に限定されず、大局的分岐を記述することができる。既に 1.5 節で紹介した (1.9) 式のような簡単な２次元系でさえ、ホップ分岐のみならず、大局的分岐の１つであるサドル結合が起こっていることがわかる。

- Gregerson & Sailer のメタモデルにおける線形性・非線形性

  彼らのモデルは、(1.10) 式に示したように、２次元一階実非線形差分方程式系である。1.5 節で述べたように、モデルのパラメータの値如何では、このモデルは、マンデルブロー系と同等となり、場合によってはカオスが出現する。

- 千野の複素差分方程式モデルにおける線形性・非線形性

  千野の複素差分方程式モデルは、一般には多次元非線形一階複素差分方程式系である

が、一次元の場合でさえ、マンデルブロー系を含む複雑な系の振る舞いを記述できる。それが多次元になると、さらに複雑な系の記述を可能にすると思われるが、多次元になると数学の分野でさえ未だ完成した理論がないようである。

第３章　単線的原因 vs. 入れ子構造になった原因ー結果論

3.1　幾何学的入れ子構造

既に第１章で紹介したように、力学系における（決定論的）カオスの主要な特徴としては、軌道の初期変位の指数関数的拡大という軌道不安定性という 力学的特性 と、アトラクタの自己相似性という 幾何学的特性 が存在する。前者は、リアプノフ指数等で評価するのに対して、後者は **フラクタル次元** (the fractal dimension) を用いて評価する。両特性のうち、後者の自己相似性は、入れ子構造と言い換えることができるので、ここではまず、それを評価するフラクタル次元について簡単にふれる。

フラクタル次元とは、通常われわれが理解している空間の次元数に対する定義を拡張したものである。通常の空間での次元は、より一般的には**位相次元** (the topological dimension) と呼ばれ、例えば正方形の一辺の長さを l、面積を N とする。この時、一辺の長さを２倍にすれば面積は４倍になる。同様に、立方体の一辺の長さを２倍にすれば体積は８倍となる。このことから、空間の次元数を d とすると、$N = l^d$ なる関係があると言える。この式の両辺の対数を取り整理すれば、通常の空間では、次元数 d と N, l との関係は

$$d = ln\,N/ln\,l,$$

とも書ける。この d の値は、通常の空間では明らかに、整数値を取る。

この位相次元に対して、フラクタル次元（もしくは相似次元とも呼ばれる）は、形の上では位相次元と同じであるが、以下に見るように、特別な空間では必ずしも整数にはならず、位相次元と区別するために、例えば

$$D_0 = ln\,N/ln\,l,$$

と書く。例として**コッホ曲線** (the Koch curve) をあげよう。この図形は、４つの同じ長さの線分をハット（帽子）のような真ん中が正三角形の斜辺になるようにつなげた図形を最初の図形とし、つぎにそれぞれの４つの線分をもとのハット図形に交換する。これを繰り返すと、コッホ曲線となる。この場合、フラクタル次元は 1.26 強となる。

フラクタル次元は、厳密に自己相似性が成り立っている図形に対して適用されるが、点集合などを含む図形や集合に対してもこの考え方を拡張したものに、**情報次元** (the information dimension) や**相関次元** (hte correlation dimension) であるが、ここでは省略する。

3.2　ロジスティック写像に見る入れ子構造

１次元差分方程式という単純な力学系であるが、情報の宝庫である系が既に紹介したロジスティック写像である。この系の自己相似構造は、既に図 1.6 及び図 1.7 に示したとおりである。ここでは、これらの図を見ながら、本ワークショップ企画者の岡林氏が提起したダイナミ

カルシステム・アプローチの対立軸の１つ「単線的原因 vs. 入れ子構造になった原因ー結果論」を考察する。

まず、図 1.6 式の分岐図は、既に第１章で見たように (1.8) 式で表される１次元一階非線形差分方程式

$$x(n+1) = 1 - \mu x^2(n), \quad x \in (-1,1), \quad \mu \in (0,2),$$

で、μ の値を定義域のゼロから２までのたくさんの値ごとに、多数回反復して得た系の軌道の値をプロットしたものである。この式は、左辺の $x(n)$ を原因、右辺の $x(n+1)$ を結果とみると、確かに 単純な因果に関する方程式である。

ここで、この因果の方程式は、既に見た図 1.1 から図 1.5 の系の軌道特徴のどれを取っても、式の中のパラメータ μ を特定の値に固定したものであることに注意しよう。この場合、これらの図で例えば図 1.5 では、時間経過に伴う軌道（この場合、縦軸の値）の変化はカオティックであるが、どの時点 n を取ってみてもつぎの $n+1$ 時点での軌道の値は、上の式によって決定される、という意味で決定論的であり、確率的ではない。

また、図 1.7 に見る自己相似構造または入れ子構造は、上の系のパラメータ μ を動かした結果見えてくる構造であり、時間のみを動かした結果見えてくる構造ではない。この意味では、ロジスティック写像に見ることができる因果の特徴は、**単純な原因・結果論である**といえよう。

一方、ロジスティック写像を時間 n ばかりでなく、パラメータ μ も含めた全体と見ると、この２次関数を、μ を動かすことも含め、反復する結果、倍周期分岐カスケード（図 1.6 の分岐図）を生み、カオスを導く、と考えると、ロジスティック写像に見る因果の構造は、**入れ子的原因・結果論とみれる**。

第4章　保存系 vs. 散逸系

力学系を考察するとき、今回のワークショップの企画者岡林氏が提案された幾つかの対立概念のうち、最も重要でかつ誤解されやすい概念が、「保存系 vs. 散逸系」であろう。この対立概念は両方とも、歴史的にもかなりあいまいに使われてきているのではなかろうか。そこで、この章ではその定義が最も厳密な数学における３つの概念である、**保存（力）場** (the conservative force field)、より一般的な保存場の概念である**ハミルトン系** (the Hamiltonian system)、及び**散逸系** (the dissipative system) の定義とその周辺について考察し、最後に社会行動科学における保存系・散逸系の概念の妥当性等に言及することにする。

4.1　保存系とその特徴

4.1.1　保存（力）場とその特徴

まず、数学における**保存（力）場** (a conservative force field) とは、つぎのように定義される３次元系である（例えば、Hirsch & Smale, 1974)：

まず、ベクトル場 $\boldsymbol{F}: R^3 \to R$ は、もし点 $\boldsymbol{x}$ に割り当てられたベクトル $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ が点 $\boldsymbol{x}$ に位置する粒子に及ぼす力 (a force) と見なされるならば、１つの**力場** (a force field) と呼ばれる。物理学でよく現れる多くの力場は、つぎのように定義される。すなわち、

定義 4.1　（保存（力）場）

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -grad\, V(\boldsymbol{x}) = -\left(\partial V(\boldsymbol{x})/\partial x_1, \partial V(\boldsymbol{x})/\partial x_2, \partial V(\boldsymbol{x})/\partial x_3\right), \tag{4.1}$$

なる $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ となるような１つの C^1 級関数 $V: R^3 \to R$ が存在する。そのような力場は **保存的** (conservative) と呼ばれる。また、そのような関数 V は、**ポテンシャルエネルギー（あるいは位置エネルギー）関数** (the potential energy function) と呼ばれる。

一方、運動中の粒子 m の時点 t での位置 $\boldsymbol{x}(t)$ に対して、**運動エネルギー** (the kinetic energy) は、

$$T = \frac{1}{2}\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|^2,$$

と表される。ここで、$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = d\boldsymbol{x}(t)/dt$ を表すものとする。すなわち、$\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ は時点 t での粒子の**速度ベクトル** (the velocity vector) である。また、その長さ $\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|$ は、時点 t での粒子の**速度** (the speed) である。

この時、粒子の全エネルギー (the total energy) は

$$E = T + V. \tag{4.2}$$

より正確には

$$E(t) = \frac{1}{2}\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|^2 + V(\boldsymbol{x}(t)). \tag{4.3}$$

つぎの定理は、保存場での粒子の全エネルギーは保存されることを示す：

定理 4.1　（エネルギー保存）(conservation of energy)
$\boldsymbol{x}(t)$ を保存（力）場 $\boldsymbol{F} = -grad\,V$ を運動する粒子の軌道とする。この時、全エネルギーは時間と独立である。

（証明）ニュートンの第 2 法則 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\ddot{\boldsymbol{x}} = m\,d^2\boldsymbol{x}/dt^2$ が成り立つとき、上記の保存（力）場では $m\ddot{\boldsymbol{x}} + grad\,V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$、あるいは、

$$m\,d^2\boldsymbol{x}/dt^2 = -grad\,V(\boldsymbol{x}), \tag{4.4}$$

が成り立つことに注意すれば、

$$d\,(T+V)/dt = 0, \tag{4.5}$$

を証明できる。

また、(4.4) 式より、<u>ニュートンの第 2 法則が成り立つ保存（力）場は、２階微分方程式系</u>として表されることに注意したい。

一方、保存（力）場に似て非なる系に、**勾配系** (the gradient field) がある。<u>勾配系</u>は、保存（力）場のような 3 次元系でなくてよく、一般に n 次元系であり、<u>一階微分方程式系</u>として定義される：

定義 4.2　（勾配系）
開集合 $W \subset R^n$ 上の**勾配系** (a gradient system) とは、つぎの形の力学系である：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = d\boldsymbol{x}/dt = -grad\,V(\boldsymbol{x}). \tag{4.6}$$

ここで、$V: U \to R$ は C^2 級関数で、

$$grad\,V = \left(\partial V/\partial x_1, \cdots, \partial V/\partial x_n\right),$$

は、V の**勾配ベクトル場** (the gradient vector field) と呼ばれる。

4.1.2　ハミルトン系とその特徴

前節で紹介した保存（力）場は、数学的に定義される一種の力学系であるし、必ずしもニュートンの第 2 法則が成り立つ必要はないが、次元数が 3 次元に限定されているし、物理系を強く意識したものといえる。これに対して、より抽象的で保存（力）場を一般化したものとみなせるのがハミルトン系である。ハミルトン系は、あとで見るように、勾配ベクトル場とも深い関係がある。以下は、Perko (1991) に従った、ハミルトン系の定義と基本的な定理である。

定義 4.3　（ハミルトン系）
E を R^{2n} の**開下位集合** (an open subset) とし、$H \in C^2(E)$ で、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$ に対して $H = H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ とする。この時、つぎの形をした系

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \partial H/\partial \boldsymbol{y}, \\ \dot{\boldsymbol{y}} &= -\partial H/\partial \boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

を E 上の自由度 n の**ハミルトン系** (a Hamiltonian system) と呼ぶ。また、うえの式の中の H を、**ハミルトン関数** (the Hamiltonian function) または**ハミルトニアン** (the Hamiltonian) と呼ぶ。

ここで、

$$\begin{aligned} \partial H/\partial \boldsymbol{x} &= (\partial H/\partial x_1, \cdots, \partial H/\partial x_n)^t \\ \partial H/\partial \boldsymbol{y} &= (\partial H/\partial y_1, \cdots, \partial H/\partial y_n)^t, \end{aligned} \tag{4.8}$$

である。

ハミルトン系は、ハミルトン関数または全エネルギー $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が系の軌道上で一定値を取るという意味で、つぎの定理からわかるように、保存的である:

定理 4.2　（エネルギーの保存）
ハミルトン系 (4.7) 式の全エネルギー $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は (4.7) 式の軌道上で一定値を取る。

（証明）(4.7) 式の形から、$dH/dt = 0$ であることは容易に証明できる。

このことから、ハミルトン系で保存されるのは、ハミルトン関数 $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ であり、必ずしもニュートンの第 2 法則を必要としないことに注意されたい。

ハミルトン系と勾配系とは、両者の軌道が直交することがわかっている（例えば、Perko, 1991, pp.159)。

4.1.3　広義の保存系

これまでに見た 2 つの系、保存（力）場とハミルトン系は、それぞれ数学的に明確な量の時間的変化が不変である系であった。すなわち、前者ではポテンシャル関数 V が、後者ではハミルトン関数 H が時間的に不変という意味でそれぞれの系において保存される量は明確に定義されている。また、両者とも古典力学としてのニュートン力学の成立する場では、粒子あるいは複数の粒子から成る系の全エネルギーは保存されることが証明できた。言い換えれば、これら 2 つの系、すなわち保存（力）場とハミルトン系では、系の保存量の定義が明確であり、とりわけニュートン力学においてはこれらの系での保存量は物理学的にも明確である。

しかし、物理学や一部の化学系等以外、とりわけ社会・行動科学の領域の現象では、系の保存量という概念の数学的に厳密な定義も、その量が対応する具体的な内容の特定も共に難しいことが多いであろう。もっとも、ハミルトン系での保存量であるハミルトン関数は、既に指摘したように、必ずしも古典力学で言う全エネルギーである必要はない。それでは、ハミルトン系以上に より広義な「保存系」は定義できないのであろうか。その答えは否であり、そのようなより広義な量が保存され系を、保存系と呼ぶことがあるようである。

例えば、Lorenz (1993) は、1.4.4 節で述べた (1.7) 式と同形のロジスティック写像

$$x(n+1) = AX(n)(1 - x(n)),$$

が、まず変換 $c = A/2 - A^2/4$ 及び $v = A(1 - 2X)/2$ により、

$$v(n+1) = v^2(n) + c, \tag{4.9}$$

と変換できること、及びこの方程式は

$$\begin{aligned} v(n+1) &= v(n) + v^2(n) - w^2(n), \\ w(n+1) &= v(n), \end{aligned} \tag{4.10}$$

と同値である、さらに 後者の (4.10) 式は保存量 $v - w^2$ を持つ ことを指摘している。また、(4.9) 式の定義域が複素数と仮定すると、マンデルブロー集合となることも指摘している。

4.2　散逸系とその特徴

4.2.1　散逸の概念のルーツ

「散逸」なる概念のルーツはどこにあるのであろうか。玉虫ら編 (1982, p. 148) によれば、Kelvin (1851) は**エネルギー散逸の原理** (principle of dissipation of energy) を提唱した。この原理は、**熱力学の第２法則** (the second law of thermodynamics) の１つの表現である。一般に、何らかの気体が入った閉じた容器の中に振り子を設置しておくと、振り子の振動は気体との摩擦により次第に減衰する。また、一般に孤立系では力学的エネルギーが減少し、系の各部分の温度は高まり、各部分の温度差は減少する。この時、系のエネルギーは一定だが、仕事として利用できる部分は減少する。この現象をエネルギー散逸の原理という。

一方、Rayleigh (1873) は、**散逸関数** (the dissipative function) を提唱した。同じく玉虫ら編 (1982, p.506) によれば、これはもともとは質点の受ける抵抗力に関するもので、物体系が普通の力のほかに、その成分が作用点の速度の成分に比例する抵抗力を受けているとする。すなわち、i 番目の質点 (x_i, y_i, z_i) に働くこの抵抗力の成分がそれぞれ、

$$-k_{ix}\dot{x}_i, -k_{iy}\dot{y}_i, -k_{iz}\dot{z}_i$$

とすると、

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(k_{ix}\dot{x}_i^2 + k_{iy}\dot{y}_i^2 + k_{iz}\dot{z}_i^2), \tag{4.11}$$

を、この物体の散逸関数という。この抵抗力以外に系に働く力がすべて保存力の場合、系のエネルギー E の時間変化は、 $dE/dt = -2F$ となるので、散逸系の名があるという。明らかにこの系は、エネルギーの時間変化を伴うので、非保存系 と言える。

4.2.2　数学における散逸系

数学の分野での**散逸系** (the dissipative system) は、Levinson (1944) にさかのぼる。レビンソンによれば、散逸系とはつぎのように定義される。

定義 4.4 （散逸系）

$F(x, y, t)$ 及び $G(x, y, t)$ を周期 L の t における周期関数とする時、つぎの式で表される系、

$$\begin{aligned} dx/dt &= F(x, y, t), \\ dy/dt &= G(x, y, t), \end{aligned} \tag{4.12}$$

は、もし t が増加する時この系の任意の解 $(x(t), y(t))$ が有限の (x, y) 平面にとどまり、

$$lim_{t\to\infty}\, sup(x^2(t) + y^2(t)) < R^2, \tag{4.13}$$

なる R が存在するならば、(4.11) 式で表される系は、クラス D (class D) あるいは**大きな変位に対する散逸系** (a dissipative system for large displacements) と呼ばれる。

結局、レビンソンの定義する散逸系では、時間が十分長く経過すると、系の軌道が 原点からの ある範囲に到達し、そこに留まる ことになる。

Levinson (1944) の論文の冒頭には、それまでの非線形微分方程式の分野の関心は、主として天体力学の問題に起因した**保存系** (conservative systems) の力学に力点が置かれてきたが、この論文での焦点は**非保存系** (non-conservative systems) にある、と書かれている。実際、彼

の定義した系では、系の面積保存則が成り立たないことがわかっており、一種の広義の非保存系と言える。Shiraiwa (1977) は、レビンソンの散逸系を一般の n 次元の場合に拡張している。

いずれにせよ、これら数学における散逸系は保存（力）場のような全エネルギー（非）保存などとは本来無関係に定義された数学的・抽象的な系であることに注意したい。

4.2.3　ニコリス・プリゴジンの散逸構造

よく知られているように、Clausius (1865) のエントロピー増大の原理により、**孤立系** (an isolated system) でのエントロピーは不可逆的変化により常に増大し、系は熱平衡状態となる、すなわち系は最後に熱死を迎え、エントロピーは最大となる。これに対して、Nicolis & Prigogine (1977) は、**開放系** (an open system) を考察し、平衡点から遠く離れた非線形系では、孤立系と対照的に、さまざまな秩序が形成されることを指摘し、いわゆる**散逸構造** (the dissipative structure) の概念を提唱した。

１つの例として、彼らは Belousov-Zhabotinsky 反応を考察している。この系はセリウムを触媒とする臭化物の硫酸溶液によるマロン酸の臭化反応と酸化反応を含み、孤立系にして、均一になるように振り混ぜた化学的混合物を浅い皿に入れておくと、自然に螺旋模様のパターンを生成するが、最終的には系は均一状態になり死に至る。一方、適切な薬品を継続的に系に補給したり取り出したりし続けると、組織化された状態を維持する（Thompson & Stewart, 1986, 武者ら訳, 1988）。

ここで、ニコリス・プリゴジンの散逸構造を持つ系は、白岩 (2006, personal communication) によれば、数学における散逸系とは全く異なる一般的なもので、概念的にも遠く離れたものであるという。

4.3　社会行動科学における保存系・散逸系の概念

これまで、保存系と散逸系について数学や物理学などの分野の概念が歴史的にどのように定義され使われてきたかを簡単に振り返ってみた。その限りでは、両者とも厳密な数学における定義からそれ以外の学問領域で用いられる広義の定義まであり、必ずしも一義的な意味づけがなされていないことがわかる。

一方、社会行動科学の分野とりわけ、心理学の領域でも力学系の理論を使う試みが８０年代の後半からは、数多くなされている。確かに、物理学や化学、生物学の領域における分岐理論やカオス理論は魅力的であり、ニコリス・プリゴジンの提唱する開放系での自己組織化の理論を心理学にも導入する誘惑に駆られる。しかし、その理論の中核にある保存系や散逸系の定義そのものが、社会行動科学とりわけ心理学の領域では多くの場合かなりあいまいであるように思われる。この点はどのようにしたら克服できるのであろうか。

しかし、一方では、例えば一般に発達心理学が扱う現象は、発達遅滞の問題もあるが、発達の概念そのものは明らかに無秩序化の方向ではなく秩序形成であり、自己組織化の方向である。また、見ず知らずの複数の成員の相互作用を通じた小集団の形成・変容過程も、明らかに秩序の形成と崩壊を含むダイナミックな過程と見れよう。また、記憶や概念形成などは、既に多くの研究により力学系の平衡点やカオスとの関連が指摘されている。これらの現象について、系の保存量は何であり何が散逸するのかを現象との対応をきちんとつけたりする試みは、理論的な観点から重要ではなかろうか。

また、心理学や社会行動科学ではよく見かけることであるが、現象を単に例えば力学系の言

葉で事後的に説明するだけでは真に科学的理論とはなりえないであろう。科学哲学の視点からは、理論的法則はそれまでの知見では説明できなかったことを説明できたり、それまで知られていない現象や近い将来起こるであろう現象を事前に予測できたりすることが必要であろう。心理学や社会行動科学におけるダイナミカルシステム・アプローチは、このような方向に発展した暁に、はじめて多くの研究者に受け入れられるのではないか。

第5章　安定 vs. 不安定

この節では、まず数学の領域、とりわけ力学系の研究で基本的な役割を果たしてきた２つの安定性の概念を簡単に紹介し、集団のシステム解析や心理学全般におけるそれらの持つ意味と妥当性について議論する。

5.1　数学における安定性の定義

5.1.1　リアプノフ安定性

力学系の安定性の理論として最もよく知られているのは、系の**平衡点の（リアプノフ）安定性** ((Liapunov) stability of an equilibrium point) の概念である（例えば、Hirsch & Smale, 1974, Chapter 9)。これは、一般の非線形一次微分方程式系に関する解軌道の長期的振る舞いに関するものである：

定義 5.1
$\boldsymbol{x}^* \in W$ は (2.7) 式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in R^n, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{k},$$

で表される非線形一次微分方程式系の平衡点であり、$f : W \to E$ はベクトル空間 E の開集合 W から E への C^1 写像 (continuously differentiable map) であるとする。もし、W における $\boldsymbol{x}^*$ のどんな近傍 U に対しても、すべての $t > 0$ に対して、初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ のどんな解 $\boldsymbol{x}(t)$ も定義され、かつ U に含まれるような、U 内の $\boldsymbol{x}^*$ の近傍 U_1 が存在するならば、平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ は **安定** (stable) である。

定義 5.2
平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ が、定義１での性質に加え、さらに U_1 が $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*$ と選べるならば、**漸近的安定** (asymptotically stable) である。

定義 5.3
平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ が安定でなければ、**不安定** (unstable) である。この場合、U 内の $\boldsymbol{x}^*$ のどんな近傍に対しても、$\boldsymbol{x}(0) \in U_1$ から出発し、U 内のどこにもないような少なくとも１つの解 $\boldsymbol{x}(t)$ が存在する。

これらの定義から、

- 沈点は漸近的安定したがって安定である、
- 渦心点は安定ではあるが漸近的安定ではない、
- 源点は不安定である、

ことが証明できる。線形系の場合と同様、平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ はヤコビアンの固有値が非ゼロ実部を持つ場合（すなわち、沈点か源点の場合）**双曲的** (hyperbolic) と呼ばれるが、双曲的平衡点はそれ故に不安定か漸近的安定かのいずれかであるといえる。

5.1.2　差分系における安定性

リアプノフ安定性は、微分方程式の平衡点の近傍での軌道の長期的安定性に関するものであったが、差分方程式の場合にも基本的には同様な安定性の定義がなされる（例えば、Elaydi, 1999)。

定義 5.4

(a) 実非線形差分方程式の平衡点 x^* は、$\epsilon > 0$ が与えられた時、$| x_0 - x^* | < \delta\,(\delta > 0)$ が、すべての $n > 0$ に対して $| f^n(x_0) - x^* | < \epsilon$ を意味するような δ が存在すれば、**安定** (stable) である。

(b) 平衡点 x^* は、$| x_0 - x^* | < \eta\,(\eta > 0)$ が、$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ を意味するような η が存在すれば、**吸引的** (attracting) である。吸引的平衡点 x^* は、$\eta = \infty$ の時、**大局的アトラクタ** (a global attractor) あるいは、**大局的吸引的** (globally attracting) と呼ばれる。

(c) 平衡点 x^* は、安定でかつ吸引的ならば、**漸近的安定平衡点** (asymptotically stable equilibrium) である。ここで、もし $\eta = \infty$ ならば、**大局的漸近安定** (globally asymptotically stable) と呼ばれる。

（註１）平衡点 x^* が安定とは、簡潔に表現すれば、初期値 x_0 が平衡点 x^* から $\delta > 0$ 内にある時、どんな $n > 0$ に対しても、x_n は x^* から $\epsilon > 0$ の中にある場合をさす。したがって、必ずしも x_n は x^* に収束しなくてもよい。

（註２）平衡点 x^* が吸引的とは、初期値 x_0 が平衡点 x^* から $\eta > 0$ 内にあれば、x_n が $n \to \infty$ の時、平衡点 x^* に収束する場合をさす。一方、大局的吸引的とは、初期値 x_0 が平衡点 x^* から有限の範囲にあればいつでも、x_n が $n \to \infty$ の時、平衡点 x^* に収束する場合をさす。

（註３）平衡点 x^* が漸近安定とは、初期値 x_0 が x^* から $\eta > 0$ 内にあれば、どんな $n > 0$ に対しても、x_n は x^* から $\epsilon > 0$ の中にあり、かつ $n \to \infty$ の時、平衡点 x^* に収束する場合をさす。

安定性の基準

ここでは、実非線形差分方程式の安定性の基準（例えば、Elaydi, 1999）について述べる。

定理 5.1
x^* は実非線形差分方程式

$$x(n+1) = f(x(n)), \tag{5.1}$$

の平衡点であるとする。ここで、f は x^* で連続的に微分可能であるとする。この時、

(i) $| f'(x^*) | < 1$ ならば、x^* は漸近的安定

(ii) $| f'(x^*) | > 1$ ならば、x^* は不安定

（註１）差分力学系は、平衡点 x^* は $|f'(x^*)| \neq 1$ の時、**双曲的** (hyperbolic) と呼ばれる。

定理 5.2
(5.1) 式の平衡点 x^* に対して、$f'(x^*) = 1$ とする。この時、

(i) $f''(x^*) \neq 0$ ならば、x^* は不安定

(ii) $f''(x^*) = 0$ でかつ $f'''(x^*) > 0$ ならば、x^* は不安定

(iii) $f''(x^*) = 0$ でかつ $f'''(x^*) < 0$ ならば、x^* は漸近的安定

定理 5.3
(5.1) 式の平衡点 x^* に対して、$f'(x^*) = -1$ とする。この時、

(i) $Sf(x^*) < 0$ ならば、x^* は漸近的安定

(ii) $Sf(x^*) > 0$ ならば、x^* は不安定

（註１）一般に、$Sf(x)$ は **シュワルツの導関数** (the Schwarzian derivative of a function f) と呼ばれ、

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2. \tag{5.2}$$

周期点とその安定性

差分方程式では、平衡点以外に、ある正整数 k に対して、k 回目ごとに同じ点に戻る点、すなわち **周期点** (a periodic point) を考えることができる。正確な定義はつぎのようである（Elaydi, 1999）：

定義 5.5
点 b は、f の定義域内にあるとする。この時、

(i) 点 b は、もしある正整数 k に対して、$f^k(b) = b$ ならば、f の（(5.1) 式における）周期点と呼ばれる。そこで、ある点が

$$x(n+1) = g(x(n)), \quad g = f^k, \tag{5.3}$$

の平衡点であるならば、すなわち f^k の固定点であるならば、**k-周期的** (k-periodic) である。点 b の周期的軌道、$O(b) = \left\{b, f(b), \ldots, f^{k-1}(b)\right\}$ は、しばしば **k-周期** (k-cycle) と呼ばれる。

(ii) 点 b は、もしある正整数 m に対して、$f^m(b)$ が k-周期的ならば、**不測 k-周期的** (eventually k-periodic) と呼ばれる。

（註１）上田ら (1995) は、うえの「k-周期」を「b_0 の周期系」と呼んでいる。
（註２）宇敷訳 (1988, p.54) では、うえの「不測 k-周期的」を「終局周期的」と訳している。

5.2　生物学における平衡点の安定性

平衡点（特異点でもある）の解釈は、古くから例えば生物学における**形態形成** (morphogenesis) の分野でなされてきた（例えば、Rosen, 1970)。とりわけ、形態形成の基本的問題である最初均質な細胞の塊がどのようにして分化した特性を獲得していくかに関して 40 年代から 50 年代にかけて提案された**ラシェフスキー・チューリングの理論** (the Rashevsky-Turing theory) (Rashevsky, 1940, Turing, 1952, Waddington, 1957) によれば、細胞の初期の均質な状態は**不安定な平衡** (unstable equilibrium) 状態であり、やがてそれは不規則な動揺により平衡状態から外れ、明確に定まった **漸近的安定** (asymptotically stable) 状態に向かうという。

生物学では、系の最終状態が、初期状態の如何に無関係な場合、系は**等終局性** (equifinality) を持つと呼ぶ (Rosen, 1970)。その意味では、まさに漸近安定性 (asymptotical stability) は、生物学における等終局性に対応している。

ただし、ここで注意が必要である。（リアプノフ）安定性は、あくまでも特定の系における状態変数の値を漸近的安定な平衡点（あるいは特異点）の近くで攪乱させた場合、つまり、初期値を変えた場合長期的には状態変数の値は特異点に収束していくかどうかという議論である。したがって、漸近安定性の議論では、系自身（より正確には系の方程式自身）は変わらないことを前提にした議論である点に注意が必要である。

5.2.1　集団のシステムにおける意味と妥当性

第 1 章で紹介した DYNASCAL では、特異点のリアプノフ安定性に関するこれらの特性を、小集団の形成・分解過程の問題に当てはめると、5.1.4 節で述べた特異点の心理学的解釈が成り立つとすると、小集団もしくは下位集団の形成過程（沈点）はリアプノフ安定、同分解過程はリアプノフ不安定、アンビバレントな心理学的場（渦心点）はリアプノフ安定だが、同漸近的安定ではない、ということになる

5.2.2　心理学全般における意味と妥当性

心理学全般では、リアプノフ安定性の概念は、それなりの意味と妥当性を持つであろうか。例えば、乳児の運動機能の発達は、この種の安定性を獲得すると言えるであろうか。心理学者の研究ではないが、これまでの研究の中には学習や知覚現象についての平衡点の対応可能性に言及したものもある。例えば、現在では古典的な研究に属するが、Amari (1977) は、**マカロック・ピッツのニューロン** (McCulloch-Pittsformal neuron) の原理に従った連想と概念形成のモデルを提案する中で、例えば**概念形成** (concept-formation) は、複数のニューロンが自己組織化する中で複数の特異点を形成する系を創出することであり、このようなメカニズムは **短期記憶** (short-term memory) に属するとする。一方、**長期記憶** (long-term memory) は、これらに関与した**シナプス重み** (synaptic weights) の変化に対応するとする。また、Tsuda (1991) はニューラルネットワーク、とりわけ神経回路の**非線形振動子** (nonlinear oscillator) に関する考察から、われわれの知覚 (perception) は力学系の固定点であり、概念 (concept) はリミットサイクル、トーラス、カオスなどの振動活動であろう、と述べている。

5.3　構造安定性

5.3.1　数学における定義

構造安定性の定義は、最初 Andronov and Pontrjagin (1937) が小さな摂動に対しても軌道特性の変わらない系を「粗い系」と呼んだのに対して、後に Lefschetz が命名したという（青木・白岩、1985)。ここでは、**ハートマン・グロブマンの定理** (Hartman & Grobman's theorem) を用いて、その定義を行う。それによれば、非線形系のヤコビアンが特異点で非ゼロ実部を持つならば、すなわち、ヤコビアンの固有値にゼロまたは純虚数となるようなものがないならば、場は構造安定と呼ばれる。

構造安定な系は、系を外から多少摂動させても、その軌道特性は変わらないので、そのような系は 観測可能である。たとえば、線形化された系の特異点のうち、唯一 渦心点は、既に見たように実部がゼロの固有値を特徴とするので、構造不安定 であり、その結果厳密な軌道は丸めの誤差を伴うコンピュータでは描けない（どの軌道も完全な円にはならない）し、原理的に観測不可能である。また、ホップ分岐などのベクトル場の特異点の分岐の過程で見られるところの 退化特異点もゼロ実部を持つため観測不可能 である。例えば、ホップ分岐の瞬間は理論的数学的に議論できても、観測は原理的に不可能である。一般に、われわれが観測できるのは構造安定な系のみであり、構造不安定な系は観測できない。構造安定性という概念は、科学哲学の立場からは、多くの心理学者が拠ってたつ実証主義の限界を数学的に示す一例とも言えよう。

5.3.2　心理学における意味と妥当性

1.5 節で述べた、DYNASCAL のシミュレーション用モデル (1.9) 式では、既に紹介した図 1.8 から図 1.14 を見ればわかるように、各種の特異点が現れては消えてゆくダイナミックな場が見れる。既に述べたように、構造不安定な場は誤差を伴うコンピュータや科学的観測では、厳密には原理的に観測することができないので、直接見ることはできないが、構造不安定な場の両側の場を見るとその存在を推測することはできる。集団の形成・変容過程のような心理学的過程は、構造安定と不安定を繰り返すダイナミックな場と考えられるが、例えば発達心理学的な現象の多くは、構造安定性の概念が当てはまるのではなかろうか。

References

合原一幸編著 (1992). カオスーカオス理論の基礎と応用　サイエンス社

合原一幸編 (2005). カオス時系列解析の基礎と応用　産業図書

Amari, S. (1977). Neural theory of association and concept-formation. *Biological Cybernetics*, **26**, 175-185.

Andronov, A. A., & Pontrjagin, L. S. (1937). Systémes grossiers. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **14**, 247-250.

Chino, N. (1987). A bifurcation model of changes in interdependence structure among objects. *Bulletin of The Faculty of Humanities of Aichigakuin University*, **17**, 85-109.

Chino, N. (1990). A generalized inner product model for the analysis of asymmetry. *Behaviormetrika*, **27**, 25-46.

千野直仁 (1991). 集団のシステム解析 三隅二不二・木下冨雄編「現代社会心理学の発展 II」第６章 数理モデル ２ (pp.385-413) ナカニシヤ出版

Chino, N. (1992). Metric and nonmetric Hermitian canonical models for asymmetric MDS. *Proceedings of the 20th annual meeting of the Behaviormetric Society of Japan*, Tokyo, Japan.

千野直仁 (1997). 非対称多次元尺度構成法　現代数学社

Chino, N. (1998). Hilbert space theory in psychology (1) - Basic concepts and possible applications. *Bulletin of The Faculty of Letters of Aichi Gakuin University*, **28**, 45-65.

Chino, N. (2000). Complex difference system models of social interaction - Preliminary considerations and a simulation study. *Bulletin of the Faculty of Letters of Aichi Gakuin University*. **30**, 43-54.

Chino, N. (2002). Complex space models for the analysis of asymmetry. In S. Nishisato, Y. Baba, H. Bozdogan, & K. Kanefuji (Eds.) *Measurement and Multivariate Analysis*, Tokyo: Springer. pp.107-114.

Chino, N. (2003a). Complex difference system models for the analysis of asymetry. In H. Yanai, A. Okada, K. Shigemasu, Y. Kano, & J. J. Meulman (Eds.) *New Developments in Psychometrics*, Tokyo: Springer. pp.479-486.

Chino, N. (2003b). Fitting complex difference system models to longitudinal asymmetric proximity matrices. *Book of abstracts of the 13th international meeting and the 68th annual American meeting of the Psychometric Society*, Cagliari, Italy.

千野直仁 (2006、出版予定). 心理学における微分力学系の基礎　森正義彦ら監修　シリーズ「心理学の世界」専門編第１６巻 数理心理学、第３章

Chino, N. (2006a). Abnormal behaviors of members predicted by a complex difference system model. *Bulletin of the Faculty of Psychological & Physical Science*, **1**, pp.69-73.

Chino, N. (2006b). Asymmetric multidimensional scaling and related topics. *Invited lecture at the Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics*, Berlin, Germany.

Chino, N., & Nakagawa, M. (1983). A vector field model for sociometric data. *Proceedings of the 11th annual meeting of the Behaviormetric Society of Japan* (pp.9-10), Kyoto, September.

Chino, N., & Nakagawa, M. (1990). A bifurcation model of change in group structure. *The Japanese Journal of Experimental Social Psychology*, **29**, No.3, 25-38.

Chino, N., & Shiraiwa, K. (1993). Geometrical structures of some non-distance models for asymmetric MDS. *Behaviormetrika*, **20**, 35-47.

Elaydi, S. N. (1999). *An introduction to differential equations.* 2nd Ed., New York: Springer-Verlag.

Gregerson, H., & Sailer, L. (1993). Chaos theory and its implications for social science research. *Human Relations*, **46**, 777-802.

Guckenheimer, J. & Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.* Berlin: Springer-Verlag.

Hao, B-L. (1989). *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems.* Singapore: World Scientific.

林達夫ら監修 (1983).　哲学事典　平凡社

近藤次郎著 (1987). 数学モデル　丸善

Levinson, N. (1944). Transformation theory of non-linear differential equations of the second order. *Annals of Mathematics*, **45**, 723-737.

Lorenz, E. N. (1993). *The Essence of Chaos.* Seattle: University of Washington Press.

E. N.Lorenz/著　杉山勝・杉山智子/訳 (1998).　ローレンツカオスのエッセンス　共立出版

May, R. M. (1975). Biological populations obeying difference equations: Stable points, stable cycles, and chaos. *Journal of Theoretical Biology*, **51**, 511-524.

Milnor, J. (2000). *Dynamics in One Complex Variable.* 2nd edition. Wiesbaden:Vieweg & Sohn.

Newcomb, T. M. (1961). *The acquaintance process.* New York: Holt. Rinehart and Winston.

Nicolis, G., & Prigogine, I. (1977). *Self-Organization in Nonequilibrium Systems - From Dissipative Structure to Order through Fluctuations.* New York: Wiley.

Peitgen, H.-O., & Richter, P. H. (1986). *The Beauty of Fractals.* New York: Springer-Verlag.

パイトゲン H.-O ・リヒター P. H. (1986).　フラクタルの美　宇敷重弘（訳）(1988). フラクタルの美 - 複素力学系のイメージ　シュプリンガー・フェアラ ーク東京（株）

Perko, L. (1991). *Differential Equations and Dynamical Systems.* New York: Springer-Verlag.

Rashevsky, N. (1940). An approach to the mathematical biophysics of Biological self-regulation and of cell polarity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, **2**, 15-25.

Rayleigh, J. W. S. (1896). *The Theory of Sound.* Reprinted by Dover: New York.

Rosen, R. (1970). *Dynamical System Theory in Biology*, New York: Wiley-Interscience.

Saburi, S., & Chino, N. (2004). A maximum likelihood method for asymmetric MDS. *Proceedings of the 32th annual meeting of the Behaviormetric Society of Japan* (pp.24-27). Yokohama, Japan.

Saburi, S., & Chino, N. (2005). A maximum likelihood method for asymmetric MDS (2). *Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the Behaviormetric Society of Japan*, pp.404-407.

Saburi, S., & Chino, N. (2006). A maximum likelihood method for asymmetric MDS (3). *Proceedings of the 34rd Annual Meeting of the Behaviormetric Society of Japan*, pp.308-309.

白岩謙一 (1975).　常微分方程式序説　サイエンス社

Shiraiwa, K. (1977). A generalization of the Levinson-Massera's equations. *Nagoya Mathematical Journal*, **67**, 121-138.

玉虫文一ら編 (1982).　理化学辞典　岩波書店

Thompson, J. M. T., & Stewart, H. B. (1986). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. New York: Wiley.

Tsuda, I. (1991). Chaotic neural networks and thesaurus. In A. V. Holden & Kryukov, V. I. (Eds.), *Neurocomputers and attention, Chap. 2. Synchronization & Chaos: Vol.1. Neurobiology, Synchronisation and Chaos* (pp.405-424). Manchester: Manchester University Press.

Turing, A. M. (1952). The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of Royal Society*, **B237**, 5-72.

上田哲生・谷口雅彦・諸澤俊介 (1995).　複素力学系序説　培風館

Ueda, Y. (1992). *The Road to Chaos*. Santa Cruz: Aerial Press.

Waddington, C. H. (1957). *The Strategy of the Genes*, London: George Allen & Unwin.

Winsberg, S., & Carroll, J.D. (1989). A quasi-nonmetric method for multidimensional scaling via an extended Euclidean model. *Psychometrika*, **54**, 217-229.